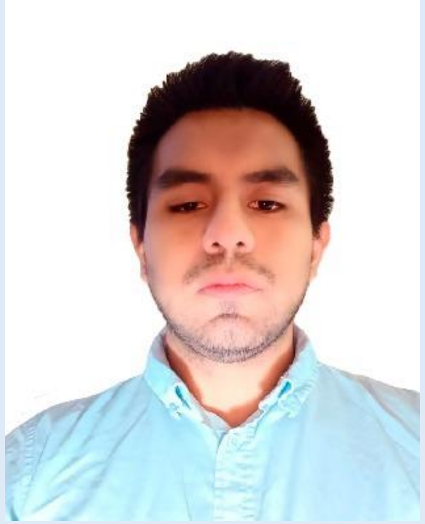

Profesor:
Ricardo Espino Lizama

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

MATRICES

1. −Definicion

Una matriz es un arreglo ***BIDIMENSIONAL*** *cuyos elementos pueden ser números. variables, funciones, incluso matrices y estos se arreglan en* ***filas y columnas***

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4 & 9 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -7 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

2. −Orden de una matriz

Sea una matriz A con ***m filas*** *y* ***n columnas***. *Se dirá que el* ***orden de la matriz es mxn*** *y además se denotará a la matriz A de la siguiente forma:* $\boldsymbol{A=[a_{ij}]_{mxn}}$

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \text{ es de orden } 2x2 \text{ y se denota: } A=[a_{ij}]_{2x2}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix} \text{ es de orden } 3x3 \text{ y se denota: } B=[b_{ij}]_{3x3}=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4 & 9 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -7 & -6 & 4\end{bmatrix} \text{ es de orden } 3x5 \text{ y se denota } C=[c_{ij}]_{3x5}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4 & 9 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -7 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

3. –Forma general de una matriz de m filas y n columnas

$$\boxed{A=[a_{ij}]_{mxn}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \quad \boldsymbol{m\ filas}$$

$$\boldsymbol{n\ columnas}$$

$donde\ \boldsymbol{a_{ij}}\ es\ el\ \boldsymbol{término}\ ubicado\ en\ la\ \boldsymbol{i}-\text{é}\boldsymbol{sima\ fila}\ y\ en\ la\ \boldsymbol{j}-\text{é}\boldsymbol{sima\ columna}$

$$i\ \in\{1;2;3;\dots;m\} \quad \wedge \quad j\in\{1;2;3;\dots;n\}$$

$Ejemplo$:

$$A=[a_{ij}]_{2x2}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow a_{11}=3 \quad a_{12}=-2 \quad a_{21}=1 \quad a_{22}=4$$

$$\boldsymbol{Se\ define\ a\ la\ matria\ A = [a_{ij}]_{2x3}\ donde\ a_{ij} = i + j}$$

$Primero:$ $$A = [a_{ij}]_{2x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2 \qquad a_{21} = 2 + 1 = 3 \qquad a_{23} = 2 + 3 = 5$$

$Finalmente:$

$$A = [a_{ij}]_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$3.-$ *Igualdad de Matrices*

Se dice que ***dos matrices A y B son iguales*** *si y solo si poseen el mismo* ***orden*** *y* ***los mismos elementos*** *en la* ***misma ubicación***

Es decir:

$$A = [a_{ij}]_{mxn} = B = [b_{ij}]_{mxn} \quad \leftrightarrow \quad A \text{ y } B \text{ poseen el mismo orden } (mxn) \text{ y además } a_{ij} = b_{ij}\ \forall i,j$$

Problema#1

01. Si las matrices A y B son iguales halle E = x + y + z, siendo

$$A = \begin{bmatrix} (0,2)^{x-1} & 3^{x+2y} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{z} & 4 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 25 & 27 \\ y & 4 \end{bmatrix}$$

A) $1 - \log_3 2$ B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

$$(0,2)^{x-1} = 25 \qquad 3^{x+2y} = 27 = 3^3 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^z = y$$

$$[5^{-1}]^{x-1} = 5^2 \qquad x + 2y = 3 \qquad 3^{-z} = 2$$

$$5^{1-x} = 5^2 \qquad -1 + 2y = 3 \qquad -z = \log_3 2$$

$$x = -1 \qquad y = 2 \qquad z = -\log_3 2$$

$$x + y + z = -1 + 2 - \log_3 2 = \mathbf{1 - \log_3 2}$$

$4.-$Álgebra de Matrices

$3.1.-$Adición de Matrices

Dada dos matrices A y B del mismo orden la matriz $C = A + B$ se define de la siguiente manera:

$$C = A + B = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$$

Ejemplo:

* Hallar la matriz A + B, a partir de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+5) \\ (0-1) & (-1+4) & (2+3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$3.2. -$ *Multiplicación de Matrices*

$3.2.1 -$ *Multiplicación ESCALAR por MATRIZ*

$Sea\ A = [a_{ij}]_{mxn} \quad \wedge \quad k \in \mathbb{R}$

$\rightarrow C = kA = k[a_{ij}]_{mxn} = [ka_{ij}]_{mxn}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2.A = 2.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$3.2.2 - \textit{Multiplicación}\ MATRIZ\ FILA\ POR\ MATRIZ\ COLUMNA$

$Sea\ A\ una\ \textbf{matriz fila}, es\ decir\ A = [a_{Ij}]_{1xn} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$

$y\ sea\ B\ una\ \textbf{matriz columna}, es\ decir\ A = [b_{ij}]_{nx1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$

$$Entonces\ se\ define\ a\ C = AxB = [a_{Ij}]_{1xn} x [b_{ij}]_{nx1} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] x \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$donde\ C = [c_{11}] = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + c_{13}.b_{31} + \cdots + a_{1n}.b_{n1}$$

$Ejemplo$:

* Multipliquemos A por B, donde :

$$A = [2 \ \ 1 \ \ 3] \ \wedge \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A.B = [2 \ \ 1 \ \ 3].\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A\ .\ B = [(2).(2) + (1).(4) + (3).(6)]$$

$$A\ .\ B = [4+4+18] \quad \therefore \quad A\ .\ B = [26]$$

$3.2.3 - Multiplicación\ MATRIZ\ por\ MATRIZ$

Sean A y B dos matrices cuyos órdenes ***concatenan***

$$es\ decir\ A = [a_{ij}]_{mxn}\ \ y\ \ B = [b_{ij}]_{nxp} \qquad (\#\boldsymbol{columnas\ de\ A} = \#\boldsymbol{filas\ de\ B})$$

$$Se\ define\ al\ \boldsymbol{C = A.B = [c_{ij}]_{mxp}}\ \ donde\ \ c_{ij}\ es\ el\ producto\ de\ la\ \boldsymbol{i - ésima\ fila\ de\ A}\ por\ la\ \boldsymbol{j - ésima\ columna\ de\ B}$$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

¿Existe A . B?, veamos :

como : # col de A = # fil de B se afirma que si existe A . B, cuyo orden es de 2×3.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} (2).(2)+(-1).(1) & (2).(-2)+(-1).(2) & (2)(5)+(-1)(-3) \\ (3).(2)+(1)(1) & (3)(-2)+(1).(2) & (3)(5)+(1)(3) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A.B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}]_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = [b_{ij}]_{3x4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$1.-$ ¿ $Existe\ AxB?$ $\quad$ $Sí\ existe\ ya\ que\ sus\ órdenes\ concatenan, es\ decir\ A_{2x\mathbf{3}}\ \ y\ \ B_{\mathbf{3}x4}$

$2.-$ ¿ $De\ qué\ orden\ es\ AxB?$ $\quad$ $Ya\ que A_{2x\mathbf{3}}\ \ y\ \ B_{\mathbf{3}x4}\ entonces\ AxB\ es\ de\ orden\ \mathbf{2x4}$

$3.-Hallar\ AxB$

$$C = AxB \quad entonces\ C = [c_{ij}]_{2x4} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{11} & \mathbf{-16} & \mathbf{29} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-2} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

Observación: $\quad$ ***AxB no es lo mismo que BxA***

Muchas veces si existe AxB pero no existe BxA y si existe, no necesariamente será igual que AxB

$$A = [a_{ij}]_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = [b_{ij}]_{3x2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$P1. -$ ¿ $Existe\ AxB$? $y\ si\ existe,$ ¿ $de\ qué\ orden\ es$?

$Si\ existe\ A_{2x3}\ y\ B_{3x2} entonces\ AxB\ es\ de\ orden\ 2x2$

$P2. -$ ¿ $Existe\ BxA$? $y\ si\ existe,$ ¿ $de\ qué\ orden\ es$?

$Si\ existe\ \ B_{3x2}\ y\ \ A_{2x3}\ entonces\ BxA\ es\ de\ orden\ 3x3$

$P3. -$ ¿ $Es\ posible\ que\ AxB = BxA$?

$No, ya\ que\ tienen\ distinto\ orden$

$$A = [a_{ij}]_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = [b_{ij}]_{2x2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BxA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$Si\ bien\ AxB\ y\ BxA\ ambas\ existen\ y\ tienen\ el\ mismo\ orden, siguen\ siendo\ diferentes$

$5.-$*Propiedades*

Teoremas :
Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además al escalar "k".

1. K . (A+B) = K . A + K . B
2. A + B = B + A
3. A . B . C = (A.B).C = A.(B.C)
4. A.(B+C) = A.B + A.C
5. A.B = 0 no implica A = 0 $\vee$ B = 0
6. A.B = A.C no implica B = C

Propiedades :
Sean las matrices A y B, de modo que existen A.B y B.A.

1. Si : A.B = B.A, se dice que A y B son matrices conmutables.
2. Si : A.B = -B.A se dice a A y B son matrices anticonmutables.

Sean dos matrices cuadradas del mismo orden

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\boldsymbol{A^2+BA+AB+B^2}$$

$$(A+B)(A-B)=\boldsymbol{A^2+BA-AB-B^2}$$

06. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}$ y $B=(b_{ij})_{2x2}$

tal que $b_{ij}=\begin{cases} i+j, & i=j \\ i+(-1)^i j, & i\neq j \end{cases}$, determine pq si se cumple:

$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

A) – 36 B) – 24 C) – 18

D) 12 E) 24

$$A=\begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$DATO: \quad (A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

$$A^2+BA-AB-B^2=A^2-B^2$$

$$BA-AB=0$$

$$BA=AB$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & 2 \\ q & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p-q & 5 \\ 3p+4q & 2 \end{bmatrix}.=\begin{bmatrix} 2p+6 & 8-p \\ 2q-3 & -q-4 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{de\ donde\ p=3\quad y\ además\ q=-6}$$

$$pq=-18$$

07. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine $A^2 + B^2$

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \qquad (A \text{ es } IDEMPOTENTE)$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \qquad (B \text{ es } IDEMPOTENTE)$$

$$A^2 + B^2 = A + B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I_3}$$

08. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, halle el valor de:

$$E = A^{25} - A^{15} + A^{5} + 15I$$

A) $\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 13 & 10 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 16 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Podemos\ por\ inducción\ afirmar\ que\ \boldsymbol{A^n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-n} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$E = A^{25} - A^{15} + A^{5} + 15I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-25} & \mathbf{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \mathbf{15} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$E = A^{25} - A^{15} + A^{5} + 15I = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-25} & \mathbf{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

6. –Transpuesta de una matriz

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n\times m}}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades :

Siendo A y B matrices, y el escalar "K".

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(K.A)^T = K.A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(A.B)^T = B^T.A^T$

7. –Matrices Especiales

M. Fila :
Es aquella matriz que tiene una sola fila.

* $[1 \quad 5 \quad 7 \quad 10]$

M.Columna :
Es aquella matriz que tiene una sola columna.

* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

M. Cuadrada :
Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

M. Nula :
Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. – Matriz Cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

DS DP

Observaciones :

1. Toda matriz cuadrada de "n" filas y "n" columnas es de orden "n".
2. La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de ***Diagonal Principal*** (D.P.).
3. La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de ***Diagonal Secundaria*** (D.S.).

Traza de A (Traz(A))

Se denomina así, a la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

$$\boxed{\text{Traz }(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}}$$

* Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

D.P.

$$\text{Traz}(A) = (2) + (8) + (-4)$$

$$\therefore \text{Traz}(A) = 6$$

Propiedades :

Siendo A y B matrices y el escalar "K".

1. $\text{Traz }(A+B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$
2. $\text{Traz }(K \,.\, A) = K \,.\, \text{Traz }(A)$
3. $\text{Traz }(A \,.\, B) = \text{Traz }(B \,.\, A)$

8. –Matriz Cuadradas Especiales

M. Diagonal : Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.
Ejemplos :

$$* \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$* \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M. Escalar : Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.
Ejemplo :

$$* \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M. Identidad (I) : Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.
Ejemplo :

$$* \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M. triangular Superior : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo :

$$* \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M. Triangular Inferior : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo :

$$* \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica : Si A es una matriz simétrica, verifica :

$$\boxed{A^T = A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz Antisimétrica : Si A es una matriz antisimétrica, verifica :

$$\boxed{A^T = -A}$$

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

luego:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $A^t = -A$, entonces A es una matriz antisimétrica.

Matriz Idempotente : Si A es una matriz idempotente, verifica :

$$\boxed{A^2 = A}$$

Matriz Involutiva : Si A es una matriz involutiva, verifica :

$$\boxed{A^2 = I;\ (\text{matriz identidad})}$$

Matriz Nilpotente : Si A es una matriz nilpotente, verifica :

$$\boxed{A^p = 0;\ (\text{matriz nula})}$$

p : índice de nilpotencia.

A periódica *si* $\exists p \in \mathbb{N} / A^{p+1} = A$. *Si* p *es el menor número natural que satisface* $A^{p+1} = A$ *, entonces decimos que* A *es una matriz periódica de* **período p.**

$A. ortogonal\ si\ A^T . A = I$

$Matriz\ Compleja{:}\quad A\ es\ compleja\ si\ al\ menos\ un\ elemento\ es\ complejo\ no\ real$

$Matriz\ Conjugada{:}\quad \bar{A}\ la\ matriz\ conjugada\ de\ A\ donde\ todos\ sus\ elementos\ son\ los\ conjugados\ de\ los\ elementos\ de\ A$

Sea A= $\begin{pmatrix} 2+i & 4+i \\ 5-i & 1 \end{pmatrix}$

Su matriz conjugada es:

$$\begin{pmatrix} 2-i & 4-i \\ 5+i & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Hermitiana: $A = \bar{A}^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i & 1+3i \\ 1-i & 2 & 2+2i & 2+3i \\ 1-2i & 2-2i & 3 & 3+3i \\ 1-3i & 2-3i & 3-3i & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Anti − hermitiana: $A = -\bar{A}^T$

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ -2 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ -2 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} i & -2 & -1 \\ 2 & -2i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & -2 & -1 \\ 2 & -2i & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & -2 & -1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ -2 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

9. –Determinante de una matriz cuadrada

Sea el determinante de una matriz de 2x2:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad Ejemplo: \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 1.4 = 2$$

Sea el determinante de una matriz de 3x3:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$ceg \quad afh \quad bdi \qquad aei \quad bfg \quad cdh$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & 2\\ 1 & 4\\ 3 & -1\end{matrix}$$

$$-12 \quad -10 \quad -2 \qquad\qquad -20 \quad 12 \quad 1$$

$$\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix} = (-20 + 12 + 1) - (-12 - 10 - 2)$$

$$= (-7) - (-24) = 17$$

10. –*Matriz Inversa*

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que : A . B = B . A = I (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}.

Teorema : Una matriz cuadrada tiene inversa, si y sólo si, es una matriz no singular; en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades :

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar "K".

1. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
2. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(K.A)^{-1} = K^{-1}.A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

Cálculo de Matrices Inversas

1. *De orden uno*

$$A = [a] \rightarrow A^{-1} = [\frac{1}{a}] \; ; \; a \neq 0$$

2. *De orden dos*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observación :

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en construir una matriz ampliada $(A \vdots I)$ donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada $(I \vdots B)$, con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A, es decir : $B = A^{-1}$.

10. –Método Gauss – Jordan

SOLO OPERACIONES BÁSICAS ENTRE FILAS

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{F_3=F_3+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz inversa de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Hallar\ la\ matriz\ inversa\ de \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$Paso\ 1.-Se\ genera\ una\ matriz\ ampliada$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$A\ la\ fila\ 1\ le\ restamos\ la\ fila\ 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$A\ la\ fila\ 2\ le\ sumamos\ 2\ veces\ la\ fila\ 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$A\ la\ primera\ fila\ le\ restamos \frac{3}{2}\ la\ segunda\ fila$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$A\ la\ fila\ 3\ le\ sumamos\ la\ mitad\ de\ la\ fila\ 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right)$$

$A\ la\ fila\ 2\ le\ sumamos\ los \frac{14}{17}\ de\ la\ fila\ 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{14}{17} & -\frac{4}{17} & -\frac{22}{17} \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right)$$

$A\ la\ 3era\ le\ sumamos\ los \frac{13}{17}\ de\ la\ primera$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{17}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{14}{17} & -\frac{4}{17} & -\frac{22}{17} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{13}{17} & \frac{-11}{17} & -\frac{18}{17} \end{array}\right)$$

$A\ la\ primera\ fila\ por\ -\frac{2}{17}$

$A\ la\ segunda\ fila\ por \frac{1}{2}$

$A\ la\ 3era\ fila\ por\ -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{8}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{17} & -\frac{2}{17} & -\frac{11}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{17} & \frac{11}{17} & \frac{18}{17} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{2}{17} & -\frac{11}{17} \\ \frac{-13}{17} & \frac{11}{17} & \frac{18}{17} \end{bmatrix}$$